УДК 519.21

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ L_2-УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛУМАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.А. Банько

Ставропольский институт управления
E-mail: norra7@yandex.ru

Получены необходимые и достаточные условия L_2-устойчивости решения линейного дифференциального уравнения с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса, принимающего два состояния с заданными интенсивностями перехода из состояния в состояние.

Одним из методов исследования устойчивости в среднем, среднеквадратичном, а также L_2-устойчивости вероятностных моделей является метод моментных уравнений [1, 2]. При этом исследование устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы детерминированных уравнений для моментов первого и второго порядка.

В работе [1] введено понятие L_2-устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами.

Нулевое решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\varsigma(t))X(t), (t \geq 0), \tag{1}$$

называется L_2-устойчивым, если для любого случайного решения $X(t)$ системы (1) *с ограниченным начальным значением $\langle \|X(0)\|^2 \rangle$ сходится несобственный интеграл*

$$I = \int_0^\infty \langle \| X(t) \|^2 \rangle dt.$$

Для дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами L_2-устойчивость не равносильна устойчивости по Ляпунову.

В работе [2] получены уравнения для начальных моментов первого и второго порядка систем линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса. Также показано, что устойчивость решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений для начальных моментов первого порядка является необходимым и достаточным условием устойчивости в среднем системы линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами (1). Устойчивость системы уравнений для начальных моментов второго порядка являются необходимым и достаточным условием устойчивости в среднеквадратичном данной системы со случайными коэффициентами (1).

В работе [3] с помощью уравнений для начальных моментов первого и второго порядка получены необходимые и достаточные условия L_2-устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами, сформулированные в виде теоремы.

Теорема. *Пусть для системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса,* (1) *со скачком решений выполнены условия* [2, *теорема* 1].

Для того, чтобы нулевое решение системы было L_2-устойчивым, необходимо и достаточно выполнения одного из условий:

1. *Система уравнений*

$$B_k = D_k(0) + \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* \, dt \quad (k = 1, ..., n). \tag{2}$$

при любых $D_k(0)>0$ ($k=1,...,n$) имела положительное решение $B_k>0$ ($k=1,...,n$).

2. *Система уравнений* (2) *при $D_k(0)=E$ ($k=1,...,n$) имела положительное решение $B_k>0$ ($k=1,...,n$).*
3. *Сходился метод последовательных приближений*

$$B_k^{(j+1)} = D_k(0) + \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s^{(j)} N_s^*(t) C_{ks}^* \, dt,$$

$$B_k^{(0)} \equiv 0 \quad (k = 1, ..., n; \ j = 0, 1, 2, ...).$$

4. *Оператор L имел спектральный радиус меньше единицы.*

Кроме того, для L_2-устойчивости решений системы достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$B_k - \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* dt > 0 \quad (k = 1, ..., n)$$

при некоторых матрицах $B_k>0$ ($k=1,...,n$).

Используем полученные в работах [2, 3] результаты для исследования L_2-устойчивости частного случая системы линейных дифференциальных уравнений (1) с полумарковскими коэффициентами.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\varsigma(t))x(t), \quad A(\theta_k) \equiv a_k \quad (k=1,2). \qquad (3)$$

где $\varsigma(t)$ – полумарковский процесс, принимающий два состояния

$$N_1 = e^{a_1 t}, \quad N_2 = e^{a_2 t}. \qquad (4)$$

Процесс $\varsigma(t)$ определяется интенсивностями перехода $q_{sk}(t)$ $(s,k=1,2)$ из состояния θ_k в состояние θ_s (3), где π_{sk} – одношаговые условные вероятности переходов из одного состояния в другое

$$\pi_{sk} = P\{\varsigma(t_{j+1}) = \theta_s \left| \varsigma(t_j) = \theta_k \right.\} \quad (s,k=1,2),$$

которые являются элементами матрицы условных вероятностей переходов

$$\Pi = \left\| \pi_{sk} \right\|_{s,k=1}^{n}.$$

Пусть интенсивности перехода, определяющие полумарковский процесс $\varsigma(t)$ из (3), заданы соотношениями

$$q_{12} = q_{21} = \begin{cases} 2T^{-2}(T-t), & t \in [0,T], \\ 0, & t > T, \end{cases} \qquad (5)$$
$$q_{11} \equiv q_{22} \equiv 0.$$

Найдем необходимые и достаточные условия L_2-устойчивости решения линейного дифференциального уравнения (3) с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса $\varsigma(t)$.

Пусть процесс $\varsigma(t)$ имеет скачки в моменты времени $t_0, t_1, t_2, \ldots, (t_0=0<t_1<t_2<\ldots)$. Предполагаем, что в момент t_j скачка процесса $\varsigma(t)$ $(\varsigma(t_j-0)=\theta_k$, $\varsigma(t_j+0)=\theta_s)$ решение системы уравнений (3) имеет скачок, определяемый уравнением

$$x(t_j+0) = cx(t_j-0).$$

Для определения условий L_2-устойчивости решения уравнения (3) рассмотрим введенные в [3] монотонные линейные операторы L_{ks}, определяемые формулами

$$L_{ks}B_s = \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} N_s(t) B_s N_s^*(t) C_{ks}^* \, dt \quad (k,s=1,\ldots,n).$$

Система уравнений (3), полученная в работе [3], в операторной форме имеет вид

$$B = D(0) + LB,$$

где обозначено

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_n \end{bmatrix}, \quad D(0) = \begin{bmatrix} D_1(0) \\ D_2(0) \\ \ldots\ldots \\ D_n(0) \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \ldots L_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots L_{nn} \end{bmatrix}.$$

Для линейного дифференциального уравнения (3) с полумарковским коэффициентом, принимающим два состояния, определяемые соотношениями (4), система (2) принимает вид

$$b_1 = D_1(0) + c^2 \sum_{s=1}^{2} \int_0^{\infty} q_{1s}(t) N_s(t) B_s N_s^*(t) dt,$$

$$b_2 = D_2(0) + c^2 \sum_{s=1}^{2} \int_0^{\infty} q_{2s}(t) N_s(t) B_s N_s^*(t) dt.$$

Будем рассматривать промежуток времени $t \in [0,T]$, тогда

$$b_1 = D_1(0) + c^2 \sum_{s=1}^{2} \int_0^{T} q_{1s}(t) N_s(t) B_s N_s^*(t) dt = D_1(0) +$$
$$+ c^2 \int_0^T (q_{11}(t) N_1(t) b_1 N_1^*(t) + q_{12}(t) N_2(t) b_2 N_2^*(t)) dt =$$
$$= D_1(0) + c^2 \int_0^T q_{12}(t) N_2^2(t) b_2 dt =$$
$$= D_1(0) + c^2 \int_0^T 2T^{-2} \left(T-t\right) e^{2a_2 t} b_2 dt =$$
$$= D_1(0) + 2T^{-2} c^2 b_2 \int_0^T (Te^{2a_2 t} - te^{2a_2 t}) dt =$$
$$= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left(\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} \bigg|_0^T - \int_0^T te^{2a_2 t} dt \right) =$$
$$= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left[\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} \bigg|_0^T - \left(\frac{te^{2a_2 t}}{2a_2} \bigg|_0^T - \frac{1}{2a_2} \int_0^T e^{2a_2 t} dt \right) \right] =$$
$$= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left[\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} \bigg|_0^T - \left(\frac{te^{2a_2 t}}{2a_2} - \frac{e^{2a_2 t}}{4a_2^2} \right) \bigg|_0^T \right] =$$
$$= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left(\frac{Te^{2a_2 t}}{2a_2} - \frac{te^{2a_2 t}}{2a_2} + \frac{e^{2a_2 t}}{4a_2^2} \right) \bigg|_0^T =$$
$$= D_1(0) + \frac{2c^2 b_2}{T^2} \left(\frac{2a_2(T-t)e^{2a_2 t} + e^{2a_2 t}}{4a_2^2} \right) \bigg|_0^T,$$

$$b_1 = D_1(0) + c^2 \frac{e^{2a_2 T} - 1 - 2a_2 T}{2a_2^2 T^2} b_2. \qquad (6)$$

Аналогично получим

$$b_2 = D_2(0) + c^2 \frac{e^{2a_1 T} - 1 - 2a_1 T}{2a_1^2 T^2} b_1. \qquad (7)$$

Используя пункт 4 теоремы, доказанной в работе [3], найдем условия L_2-устойчивости решения линейного дифференциального уравнения (3) с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса.

Оператор L имеет вид

$$L = L_1 \cdot L_2,$$

где, учитывая соотношения (6) и (7),

$$L_1 = c^2\,\frac{e^{2a_2T} - 1 - 2a_2T}{2a_2^2T^2}, \quad L_2 = c^2\,\frac{e^{2a_1T} - 1 - 2a_1T}{2a_1^2T^2}, \qquad (8)$$

Таким образом, используя соотношения (8) и условия теоремы, получим неравенство

$$c^4\,\frac{e^{2a_1T} - 1 - 2a_1T}{2a_1^2T^2} \cdot \frac{e^{2a_2T} - 1 - 2a_2T}{2a_2^2T^2} < 1,$$

определяющее необходимые и достаточные условия L_2-устойчивости решения линейного дифференциального уравнения (3) с коэффициентом, зависящим от полумарковского процесса $\varsigma(t)$, который принимает два состояния, определяемые соотношением (4), и с заданными интенсивностями перехода из состояния в состояние (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 256 с.
2. Карелова О.Л., Банько М.А. Вывод уравнений для моментов решений системы линейных дифференциальных уравнений с полумарковскими коэффициентами // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – Т. 308. – № 4. – С. 14–19.
3. Карелова О.Л., Банько М.А. Получение необходимых и достаточных условий L_2-устойчивости решения системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от полумарковского процесса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2005. – Прилож. № 4. – С. 7–12.

УДК 519.886